3. MECHANIKA-VÉGESELEM MÓDSZER ELŐADÁS

(kidolgozta: Szüle Veronika, egy. ts.)

III. előadás

2. Közelítő megoldások, energiaelvek:

2.2. A teljes potenciális energia minimum elve

A teljes potenciális energia az alakváltozási energia és a külső erők potenciáljának összege. A külső erők potenciálja helyett szokás a külső erők virtuális munkájának mínusz egyszeresének fogalmát is használni. Így a teljes potenciális energia:

$\Pi_p = U - W$,

ahol

U - az alakváltozási energia,

Húzott-nyomott rúd alakváltozási energiája $u(x)$ elmozdulás mező függvényében a következő alakú: $U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{AE}dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{(AE\varepsilon_x)^2}{AE}dx = \frac{1}{2}\int_0^l AE\varepsilon_x{}^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx$

W - a külső erők virtuális munkája.

Ez a kifejezés tulajdonképpen egy funkcionál.

Funkcionál: matematikában azokat az leképezéseket, amelyek értékkészlete valós számhalmaz, funkcionáloknak nevezzük.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Kinematikai egyenlet}: \varepsilon_x(x) = \frac{du(x)}{dx} \\ &\text{Egyensúlyi egyenlet}: \frac{dN(x)}{dx} = -f_x \\ &\text{Anyag egyenlet}: N = A\cdot E\cdot \varepsilon_x \\ &\text{Kinematikai peremfeltétel: } u(x=0) = u(0) = 0 \\ &\text{Dinamikai peremfeltétel: } N(x=l) = F_x \end{aligned}\right\} \text{A korábban megfogalmazott peremérték}$$

feladathoz rendelt funkcionál, azaz a teljes potenciális energia alakja:

$$\Pi_p = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx}_{\text{alakváltozási energia}} \quad \underbrace{-\int_0^l u\, f_x dx - F_x u_l}_{\text{külső erők virtuális munkája}}$$

Amennyiben az így kapott kifejezésre úgy tekintünk, mint az $u(x)$ tényleges megoldásra felírt teljes potenciális energiára, akkor feltehető a kérdés, hogy ehhez képest milyen nagyságú teljes potenciális energia értéket szolgáltat az $u^*(x)$ kinematikailag lehetséges közelítő elmozdulás mező?

A közelítő elmozdulásra vonatkozó teljes potenciális energia hasonlóan határozható meg:

$$\Pi_p^*\left(u^*\right)=\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du^*}{dx}\right)^2 dx-\int_0^l u^*\, f_x dx-F_x u_l^*$$

A korábban tárgyaltak szerint a közelítő mező felírható a tényleges elmozdulás mező és variációja összegeként:

$$u^*(x)=u(x)+\delta u(x)$$

Emlékeztető:

Elmozdulás mező variációja: a tényleges elmozdulásmező és annak elég kis környezetében levő kinematikailag lehetséges elmozdulásmező különbsége. A virtuális elmozdulással megegyező módon $\delta u(x)$-val jelöljük.

Röviden: $\delta u(x)=u^*(x)-u(x) \qquad \Rightarrow \qquad u^*(x)=u(x)+\delta u(x)$

Tulajdonságai: folytonos,

elegendően sokszor differenciálható,

kinematikai peremen értéke nulla.

Ezen összefüggést a potenciális energiába helyettesítve:

$$\Pi_p^*\left[u^*(x)\right]=\Pi_p^*\left[u(x)+\delta u(x)\right]$$

$$\Pi_p^*\left[u^*(x)\right]=\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du^*}{dx}\right)^2 dx-\int_0^l u^*\, f_x dx-F_x u_l^*$$

$$\Pi_p^*\left[u^*(x)\right]=\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{d}{dx}(u+\delta u)\right)^2 dx-\int_0^l (u+\delta u)\, f_x dx-F_x\left(\underbrace{u(l)}_{u_l}+\underbrace{\delta u(l)}_{\delta u_l}\right)=,$$

ahol

$$\left(\frac{d}{dx}(u+\delta u)\right)^2=\left(\frac{du}{dx}+\frac{d}{dx}(\delta u)\right)^2 dx \qquad \leftrightarrow \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ így az egyenlet}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}_{a^2}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l 2\frac{du}{dx}AE\frac{d}{dx}(\delta u)\,dx}_{2ab}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{d}{dx}(\delta u)\right)^2 dx}_{b^2}-\int_0^l u f_x dx-\int_0^l \delta u f_x dx-F_x u_l-F_x\delta u_l$$

Majd az egyenletet átrendezve:

$$\Pi_p^* = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx-\int_0^l u f_x dx-F_x u_l}_{\Pi_p-\text{egzakt/tényleges megoldás}} +$$

$$\underbrace{+\int_0^l \frac{du}{dx}AE\frac{d}{dx}(\delta u)\,dx-\int_0^l \delta u f_x dx-F_x\delta u_l}_{\delta\Pi_p=0} +$$

$$\underbrace{+\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{d}{dx}(\delta u)\right)^2 dx}_{\delta^2 \prod_p}$$

Emlékeztető: a funkcionál minimumának feltételei:

- $\delta \prod_p = 0$,
- minimum esetén $\delta^2 \prod_p > 0$.

$\delta \prod_p = 0$ A virtuális munkaelv variációs alakjának nullára rendezett alakját szolgáltatja.

Az elmozdulás variációja lineárisan szerepel, ami egyben a teljes potenciális energia első variációja és $\delta \prod_p$-vel jelölendő.

$\delta^2 \prod_p \geq 0$ Ez egy kvadratikus kifejezés integrálja, ami biztos, hogy nagyobb, mint nulla. Azaz a teljes potenciális energia minimummal rendelkezik a tényleges megoldásnál. Azaz ez a sor az elmozdulás variációját kvadratikusan tartalmazza és a teljes potenciális energia második variációját szolgáltatja, amit $\delta^2 \prod_p$-vel jelölünk. A teljes potenciális energia második variációja az u^* közelítő megoldás és a tényleges megoldás eltéréséből származó alakváltozási energia.

$$\prod_p^* = \prod_p + \underbrace{\delta \prod_p}_{=0} + \underbrace{\delta^2 \prod_p}_{>0}$$

$\prod_p^* = \prod_p + \underbrace{\delta^2 \prod_p}_{>0} \Rightarrow \prod_p^* \geq \prod_p$ Ha $u^* = u, \prod_p^* = \prod_p$. **Azaz a potenciális energia minimuma elv azt jelenti, hogy a potenciális energiának egzakt megoldás esetén minimuma van.**

Megjegyzés:

Az $u(x)$ tényleges vagy egzakt megoldás esetén mind az első mind a második variáció nulla, hiszen $F_x \delta u_l + \int_0^l \delta u f_x \, dx = \int_0^l \frac{d\delta u}{dx} A \cdot E \frac{du(x)}{dx} dx$ **teljesül, mivel az eltérés** $\delta u \equiv 0$. Az $u^*(x)$ megoldás esetén előírjuk, hogy az első variáció legyen nulla, de a második variáció $\delta^2 \prod_p \geq 0$ kiadódik.

A teljes potenciális energia Gateaux-féle deriváltja:

Egy funkcionál első variációja előállítható a funkcionál δu elmozdulás variációjának irányába vett deriválásával is azaz a Gateaux-féle deriválttal.

$$\delta \prod_p = \frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{d}{dx}(u+\lambda\delta u)\right)^2 dx - \int_0^l (u+\lambda\delta u) f_x dx - F_x\left(\underbrace{u(l)}_{u_l} + \lambda \underbrace{\delta u(l)}_{\delta u_l}\right)$$

Első lépésben végezzük el a deriválást λ paraméter szerint

$$\delta \prod_p = \left\{\int_0^l \left(\frac{d(\delta u)}{dx} AE \frac{d(u+\lambda\delta u)}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l \delta u \, f_x dx - F_x \delta u_l\right\}\Bigg|_{\lambda=0},$$

majd a $\lambda = 0$ helyettesítést, és visszakapjuk az első variációt:

$$\delta \prod_p = \int_0^l \frac{d(\delta u)}{dx} AE \frac{du}{dx} dx - \int_0^l \delta u \ f_x dx - F_x \delta u_l$$

A variáció számítás elmélete szerint egy funkcionál minimuma létezésének szükséges feltétele, hogy az első variációja legyen zérus, azaz

$$\delta \prod_p = 0 = \int_0^l \frac{d(\delta u)}{dx} AE \frac{du}{dx} dx - \int_0^l \delta u \ f_x dx - F_x \delta u_l ,$$

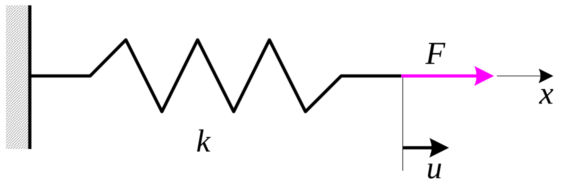
ami megegyezik a virtuális munka elve variációs alakjával. ez azt jelenti, hogy konzervatív külső terhelés esetén a két elv rugalmas peremérték feladatokra nézve egyenértékű.

A teljes potenciális energia minimum elvére alapozott közelítő megoldás tulajdonságai:

- ❖ az elmozdulás mezőnek kinematikailag lehetségesnek kell lennie,
- ❖ a kapott megoldás integrál értelemben kielégíti az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt.

2.3. Példa teljes potenciális energia minimum elvére

Egy k merevségű rugót F erő terheli. Határozzuk meg a rugó végpontjainak x irányú u elmozdulását a teljes potenciális energia minimum elvének felhasználásával!



1. ábra: Rugó terhelése koncentrált erővel

A rugalmas rendszer potenciális energiája:

$$\prod_p(u) = \frac{1}{2} k u^2 - F u$$

A teljes potenciális energia kifejezése nem funkcionál, hanem valós függvény. A potenciális energia minimum elv értelmében a függvénynek keressük a minimumát. A létezésének szükséges feltétele, hogy első deriváltja zérus legyen

$\frac{d}{du}\left[\prod_p(u)\right] = 0 = ku - F$ ezen egyenlet átalakításával a már jól ismert összefüggést kapjuk az elmozdulásra:

$$u = \frac{F}{k} .$$

A bemutatott példa megoldási módszere a legegyszerűbb lineárisan rugalmas végeselemes feladat, a mely elvét tekintve megegyezik a komplex geometriájú és terhelésű rugalmas peremérték feladat megoldásával.

2.4. Ritz-módszer

Az elv alkalmazását húzott-nyomott rúdfeladat közelítő megoldásának előállítására mutatjuk be.

$\Pi_p^* \geq \Pi_p$, ahol $\Pi_p^*\left[u^*(x)\right]$ funkcionált a $C_0, C_1, C_2, ...$ paraméterek $\Pi_p\left(C_0, C_1, C_2, ...\right)$ többváltozós függvényévé alakítjuk.

Azaz legyen valamely egydimenziós rugalmas peremérték feladat kinematikailag lehetséges elmozdulása az alábbi alakban adott (a megoldást hatványsorral közelítjük):

$u^*(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + ... + C_n x^n + ...,$

ahol $C_0, C_1, C_2, ...$ ismeretlen paraméterek. Ha ezen közelítő megoldást a

$$\Pi_p^*\left[u^*(x)\right] == \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du^*(x)}{dx}\right)^2 dx}_{\text{alakváltozási energia}} \qquad \underbrace{-\int_0^l u^* f_x dx - F_x u_l}_{\text{külső erők virtuális munkája}} \qquad \text{funkcionálba}$$

helyettesítjük, akkor a teljes potenciális energia a $C_0, C_1, C_2, ...$ paraméterek többváltozós függvényévé válik $\Pi_p^*\left(C_0, C_1, C_2, ...\right)$.

A teljes potenciális energia minimum elv alkalmazása ebben az esetben azt jelenti, hogy egy többváltozós függvény szélsőértékét keressük a szükséges feltétel alkalmazásával

$$\min \Pi_p^*\left(C_0, C_1, C_2, ...\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \Pi_p^*}{\partial C_i} = 0, \quad \left(i = 0, 1, 2, ...\right).$$

A Ritz-módszer alkalmazása az ismeretlen paraméterek számával megegyező lineáris algebrai egyenletrendszert eredményez azok meghatározásához.

2.4. Ritz-módszer, Lineáris approximáció (elsőfokú közelítés)

Tekintsük ismét a húzott-nyomott rúd feladatot, és keressük a feladat közelítő megoldását az alábbi alakban:

$u^*(x) = C_0 + C_1 x$. Ellenőrizzük, hogy ezen $u^*(x) = C_0 + C_1 x$ feltételezett megoldás kinematikailag lehetséges-e.

Emlékeztető:

Kinematikailag lehetséges elmozdulás mező: az az $u^*(x)$ elmozdulás mező, amely folytonos, elegendően sokszor differenciálható és kielégíti a kinematikai peremfeltételt. Ezen definíció alapján az első feladatra teljesülnie kell az alábbi egyenletnek.

A kinematikai peremfeltétel: $u^*(x=0) = 0$, azaz $C_0 + C_1 0 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; C_0 = 0$. Azaz az $u^*(0) = 0 = C_0 + C_1 0$ egyenlet csak akkor teljesül, ha $C_0 = 0$, azaz a kinematikailag lehetséges elmozdulás a következő alakú

$u^*(x) = C_1 x$.

A deriválhatóság feltétele $\varepsilon^*(x)=\dfrac{du^*}{dx}=C_1$ is teljesül, tehát megállapíthatjuk, hogy az $u^*(x)=C_1x$ alakú közelítő elmozdulás kinematikailag lehetséges.

Az $\left.\begin{aligned} u^*(x)&=C_1x \\ \varepsilon^*(x)&=\frac{du^*}{dx}=C_1 \end{aligned}\right\}$ képleteket behelyettesítve az

$$\Pi_p\left[u(x)\right]=\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx}_{\text{alakváltozási energia}}\qquad \underbrace{-\int_0^l u\, f_x dx - F_x u_l}_{\text{külső erők virtuális munkája}}$$

funkcionálba,

a $\Pi_p^*\left[u^*(x)\right]=\Pi_p^*(C_1)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l AE(C_1)^2 dx-\int_0^l C_1x\, f_x dx - F_x C_1 l$ kifejezést kapjuk.

Egyváltozós függvény szélsőértéke:
Szükséges feltétel: a függvény első deriváltja az adott helyen nulla legyen.
Elégséges feltétel: a függvény második deriváltjának előjele nem változhat (ez mindig teljesülni fog).
Azaz akkor lesz a potenciális energiának szélsőértéke, ha

$$\min \Pi_p^*(C_1)\quad\Rightarrow\quad \frac{d\Pi_p}{dC_1}=0=\int_0^l AEC_1 dx-\int_0^l x\, f_x dx - F_x l$$

A kijelölt integrálást elvégezve és az ismeretlen paramétert kifejezve:

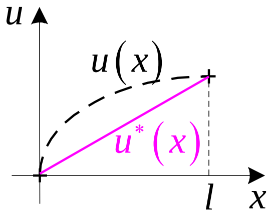
$$0=AEC_1\underbrace{\int_0^l dx}_{l}-f_x\underbrace{\int_0^l x\,dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l}-F_x l$$

$$0=AEC_1 l - f_x\frac{l^2}{2}-F_x l \qquad /:l\ /:AE$$

$$C_1=\frac{f_x l}{2AE}+\frac{F_x}{AE}=\frac{f_x l+2F_x}{2AE}$$

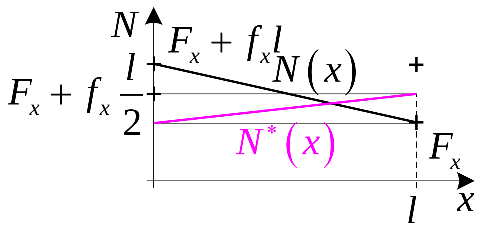
$$u^*(x)=C_1x=\frac{f_x l+2F_x}{2AE}x$$

$$\left.\begin{aligned} u(x=0)&=0 \\ u(x=l)&=-\frac{f_x}{2AE}l^2+\left(\frac{F_x+f_x l}{AE}\right)l+0=\frac{f_x l^2+2F_x l}{2AE} \\ u^*(x=l)&=C_1x=\frac{f_x l+2F_x}{2AE}l=\frac{f_x l^2}{2AE}+\frac{F_x l}{AE} \end{aligned}\right\}$$



. ábra: Elmozdulás függvény ábrázolása egzakt és közelítő megoldás esetén

$$\left.\begin{aligned}
&N(x=0)=F_x+f_x\cdot l\\
&N(x=l)=F_x\\
&N^*(x)=AE\frac{du^*}{dx}=\frac{2F_x+f_xl}{2}=F_x+\frac{f_xl}{2}\\
&N^*(x=0)=F_x\\
&N^*(x=l)=F_x+\frac{f_xl}{2}
\end{aligned}\right\}$$



Ha összevetjük a közelítő megoldásokat a megfelelő egzakt megoldásokkal akkor valóban mind a két esetben lényeges eltérés mutatkozik.

A közelítő megoldás minősítéséhez definiálnunk kell a hiba fogalmát.
A megoldás hibája: az egzakt és a közelítő megoldás közötti különbség.

$$e(x)\overset{def}{=}u_{egzakt}(x)-u^*(x),$$

ahol $e(x)$ a hiba, amely x-nek a függvénye. Gyakorlati számításokhoz a hiba energia normáját szokás alkalmazni, amely tulajdonképpen a hibafüggvényből számolt alakváltozási energia $\delta^2\prod_p(=\prod_p{}^*-\prod_p)$ második variáció négyzetgyöke.

$$\|e\|_E:=\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{d}{dx}(\delta u)\right)^2dx}=\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^l AE\left(\frac{de}{dx}\right)^2}=\sqrt{\Pi_p^*(u^*)-\Pi_p(u)},$$

ahol $\|\ \|$ a norma jele, és a norma jel E indexe az energia fogalomra utal.

A hiba lineáris approximáció esetén:

$$e(x)\overset{def}{=}u_{egzakt}(x)-u^*(x)=$$

$$e(x)=-\frac{f_x}{2AE}x^2+\frac{F_x+f_xl}{AE}x-\frac{2F_x+f_xl}{2AE}x=-\frac{f_x}{2AE}x^2+\frac{f_xl}{2AE}x$$

Ezen hiba függvényt megvizsgálva látható, hogy a hiba zérustól különböző f_x megoszló erő esetén jelentkezik, de a rúd végén $x=l$ helyettesítésnél az elmozdulás hibája zérus. Megállapítható, hogy a rúd végei az elmozdulás kiértékelése szempontjából optimális pontok.
A hiba függvény deriváltja az alakváltozás hibáját adja:

$$\frac{de}{dx}=-\frac{f_x}{AE}x+\frac{f_xl}{2AE}=\frac{f_x}{AE}\left(-x+\frac{l}{2}\right)$$

A rúd közepén az $x=\frac{l}{2}$ helyettesítésnél az alakváltozás hibája zérus, azaz az alakváltozásból számolt rúderő ebben a pontban pontos. A feladatban a rúderő optimális kiértékelési helye a rúd felező pontja.
Az energia norma szerint értelmezett hiba:

$$\|e\|_E := \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^l AE\,\frac{f_x^2}{A^2E^2}\left(\frac{l}{2}-x\right)^2} = \sqrt{\int_0^l \frac{f_x^2}{2AE}\left[\frac{-\left(\frac{l}{2}-x\right)^3}{3}\right]_0^l} = \sqrt{\frac{f_x^2}{2AE}\left(\frac{l^3}{24}+\frac{l^3}{24}\right)} = \sqrt{\frac{f_x^2 l^3}{24AE}}$$

A végeselem programok a megoldás hibáját szintén energia normában adják meg. Felvetődik a kérdés, hogy hogyan változik a megoldás pontossága az approximáció fokszámának növelésekor? A következő példában az elmozdulást kvadratikus függvénnyel közelítjük.